Grundlagen Rechnernetze und Verteilte Systeme (IN0010)

Übungsblatt 2

29. April – 3. Mai 2024

Aufgabe 1 Quellenentropie

Gegeben sei eine binäre, gedächtnislose Nachrichtenquelle Q, welche voneinander statistisch unabhängige Zeichen aus dem Alphabet $\mathcal{X} = \{a, b\}$ emittiert. Wir modellieren diese Nachrichtenquelle als diskrete Zufallsvariable X. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Quelle das Zeichen $X = a$ emittiert, betrage $p_a = \Pr[X = a] = 0.25$.

a)* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p_b, dass das Zeichen $X = b$ emittiert wird.

Da $p_a + p_b = 1$ folgt $p_b = 0.75$.

b) Bestimmen Sie den Informationsgehalt $I(a)$ und $I(b)$ beider Zeichen.

$$I(a) = -\log_2 p_a = 2.00\,\text{bit}$$
$$I(b) = -\log_2 p_b \approx 0.42\,\text{bit}$$

c) Bestimmen Sie die Entropie H der Quelle.

$$H(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_x I(x) = 0.81\,\text{bit/Zeichen}$$

d) Bestimmen Sie die Auftrittswahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 einer anderen binären Nachrichtenquelle Q', so dass deren Entropie H maximal ist.

Zunächst drücken wir p_1 durch p_0 aus und schreiben $p_1 = 1 - p_0$. Zur Vereinfachung schreiben wir $p_0 = p$. Anschließend lässt sich die Entropie H als Funktion in Abhängigkeit von p ausdrücken und die gesuchte Wahrscheinlichkeit mittels Ableitung bestimmen:

$$H = -p\log_2(p) - (1-p)\log_2(1-p)$$
$$\frac{dH}{dp} = -\log_2(p) - \frac{p}{p\ln(2)} + \log_2(1-p) + \frac{1-p}{(1-p)\ln(2)}$$
$$\Rightarrow \log_2(p) + \frac{p}{p\ln(2)} \stackrel{!}{=} \log_2(1-p) + \frac{1-p}{(1-p)\ln(2)}$$

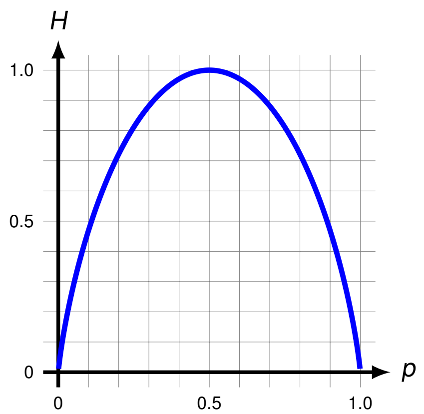
Vergleich beider Seiten liefert $p = 1 - p = 1/2$.

e) Wie hoch ist demnach die maximale Entropie einer binären Quelle?

Die Entropie wird maximiert, wenn $\Pr[X = a] = \Pr[X = b] = 0.5$ gilt. Die maximale Entropie beträgt daher

$$H_{\max} = -2 \cdot 0.5 \cdot \log_2(0.5) = 1\,\text{bit}/\text{Zeichen}.$$

f) Skizzieren Sie die Quellenentropie H einer binären Quelle allgemein in Abhängigkeit der Auftrittswahrscheinlichkeit p.



g) Offensichtlich ist die Entropie $H(X) < 1$ nicht maximal. Welche Schlussfolgerung lässt sich aus dieser Tatsache für den von der Quelle Q emittierten Datenstrom hinsichtlich Redundanz ableiten?

Die von Q emittierte Zeichenkette, welche nichts anderes ist als verschiedene Realisierungen der Zufallsvariable X, beinhaltet Redundanz. Der von Q erzeugte Datenstrom ist durchschnittlich mit weniger als 1 bit/ Symbol darstellbar.

h) Verallgemeinern Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben d) und e) auf eine N-äre Quelle, d. h. auf eine Quelle, die N unterschiedliche Zeichen emittiert.

Allgemein gilt für die Entropie

$$H(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} I(x) p_i.$$

Mit der Forderung $p_i = p$, d. h. alle Zeichen treten mit derselben Wahrscheinlichkeit auf, folgt sofort $p = 1/N$ und damit

$$H = \sum_{x \in \mathcal{X}} I(x) p = -\sum_{i=1}^{N} \log_2 \left(\frac{1}{N}\right) \frac{1}{N} = \log_2(N).$$

Aufgabe 2 Quantisierung und Kanalrauschen

In dieser Aufgabe soll eine Temperaturkurve digitalisiert und der Einfluss von Rauschen auf Signale untersucht werden. Hierfür sollen Temperaturen im Bereich von −40 ℃ bis 70 ℃ betrachtet werden. Die gemessenen Werte sollen linear abgebildet werden, wobei eine Schrittweite von höchstens 0.5 ℃ erreicht werden soll.

a)* Erklären Sie den Unterschied zwischen Abtastung und Quantisierung.

- Abtastung ist die Diskretisierung eines kontinuierlichen Signals im Zeitbereich ohne Runden.
- Quantisierung ist die Diskretisierung eines Signals in Signalstufen, d. h. im Wertebereich mit Runden.

b)* Wie viele Bit werden für die Digitalisierung eines einzelnen Temperaturwerts mindestens benötigt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aus der Vorlesung kennen wir den Zusammenhang

$$M = \frac{b-a}{\Delta}, \tag{2.1}$$

wobei M die Anzahl der Signalstufen, a und b die Unter- bzw. Obergrenze des Quantisierungsintervalls sowie Δ die Stufenbreite bezeichnet. Einsetzen liefert $M = 220$ Signalstufen, was wiederum $N = \lceil \log_2(M) \rceil = 8\,\text{bit}$ entspricht.

c) Mit welcher Schrittweite kann aufgrund der verwendeten Bitanzahl laut Teilaufgabe b) nun die Temperatur bestimmt werden?

Da wir ohnehin 8 bit zur Darstellung von Quantisierungsstufen nutzen müssen, ergeben sich in der Praxis $M' = 256$ anstelle von $M = 220$ Quantisierungsstufen. Auflösen von (2.1) nach Δ' und Einsetzen ergibt $\Delta' \approx 0.43\,°\text{C}$

d) Bestimmen Sie den maximalen Quantisierungsfehler bezüglich der berechneten Schrittweite aus Teilaufgabe c) unter der Annahme, dass mathematisches Runden verwendet wird.

$$\Delta'/2 = 0.43\,°\text{C} \cdot \frac{1}{2} \approx 0.215\,°\text{C}$$

Sollten Sie vorhergehende Teilaufgaben nicht gelöst haben, gehen Sie von 256 Quantisierungsstufen aus.[1] Das verwendete Basisbandsignal verwendet für jede Temperaturstufe genau ein Symbol. Es soll eine Kanalkapazität von 10 kbit/s erreicht werden.

e) Bestimmen Sie die mindestens benötigte Bandbreite bei einem rauschfreien Kanal, wenn die angegebene Kanalkapazität erreicht werden soll.

Gesetz von Hartley: $C_H = 2B\log_2(M) \Rightarrow B = \frac{C_H}{2\log_2(M)} = 625\,\text{Hz}$

f) Auf welchen Wert würde die Kanalkapazität bei gleicher Bandbreite sinken, wenn ein SNR von 35 dB angesetzt werden würde?

Gesetz von Shannon: $C_S = B\log_2(1 + \text{SNR})$ wobei dB das 10-fache des dekadischen Logarithmus zweier gleicher Größen angibt. Wir erhalten also für das SNR:

$$\text{SNR} = 10\log(X) \Rightarrow X = 10^{(\text{SNR}/10)} \approx 3162.28$$

Eingesetzt in C_S ergibt sich:

$$C_S = B\log_2(1 + X) \approx 7267\,\text{bit/s}$$

(Die erzielbare Bandbreite ist stets das Minimum von C_H und C_S!)

[1] In der Klausur bauen Aufgaben grundsätzlich aufeinander auf, d. h. es sind Zwischenergebnisse vorheriger Teilaufgaben zu nutzen. Bei längeren Aufgaben geben wir – wenn es sich anbietet – manchmal Ersatzwerte an, so dass ein Wiedereinstieg möglich ist.

Aufgabe 3 Signalanalyse und Synthese

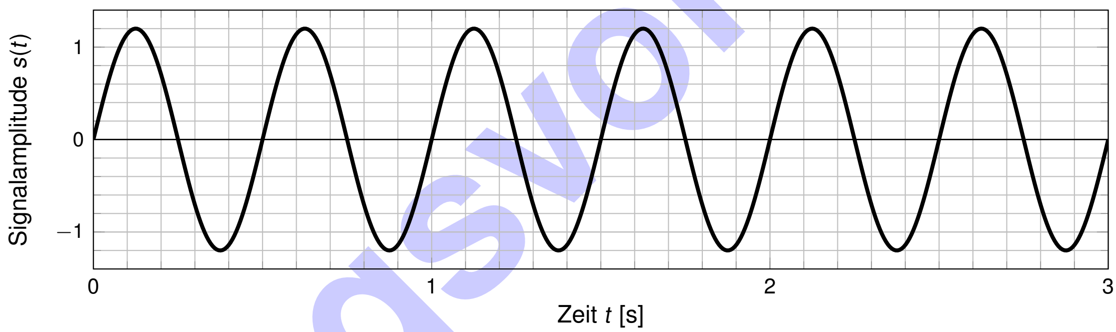
Signale lassen sich im Allgemeinen entweder im *Zeitbereich* oder im *Frequenzbereich* darstellen. Diese beiden Darstellungen lassen sich durch eine Fourier-Analyse bzw. Synthese ineinander überführen. Die vorliegenden Signale sind periodisch im Zeitbereich, daher lässt sich die das Frequenzspektrum mittels Fourier-Reihe analysieren.

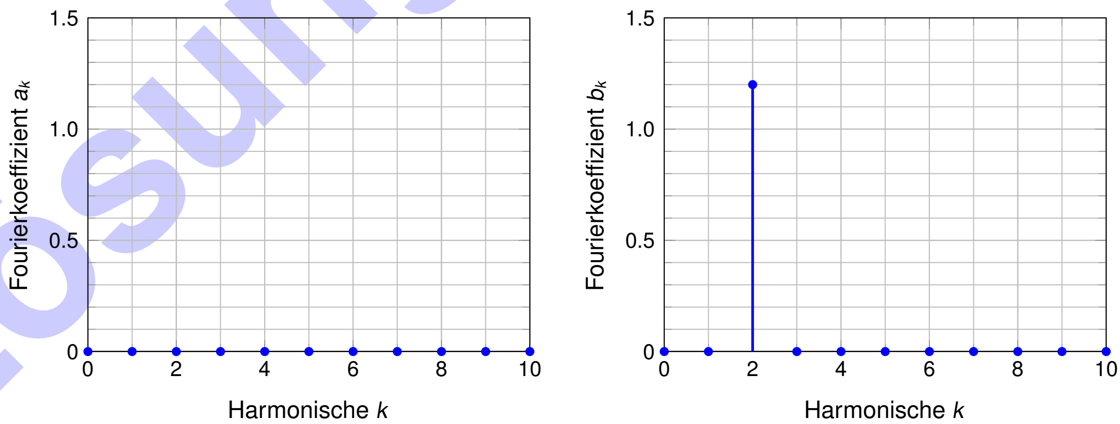
a) Aus welchem Grund ist das Spektrum eines Signals bzw. die Darstellung eines Signales im Frequenzbereich interessant?

Ein periodisches Signal besteht aus der Überlagerung mehrerer harmonischen Schwingungen. Ein nicht optimaler Kanal hat oftmals gewisse Filtereffekte, sodass verschiedene Frequenzen unterschiedlich gedämpft werden bzw. unterschiedlich „gut“ übertragen werden können. Filter können im allgemeinen mathematisch leichter im Frequenzbereich angewandt und untersucht werden.
Die Überlagerung mehrerer harmonischen Schwingungen findet sich auch in der Akustik wieder. Ein von einem Instrument erzeugter Ton besteht gewöhnlicherweise aus einer Grundschwingung / einem Grundton, sowie aus mehreren Oberschwingungen. Diese lassen sich durch eine Frequenzanalyse erkennen.
Weitere Anwendungsgebiete der Fourier-Analyse sind beispielsweise bei der Optik, bei der digitalen Bild- und Audioverarbeitung, sowie auch der Quantenmechanik.

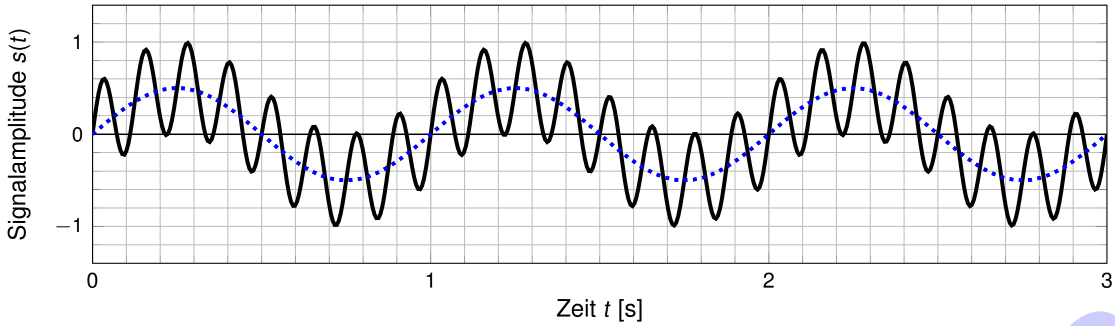
Analyse

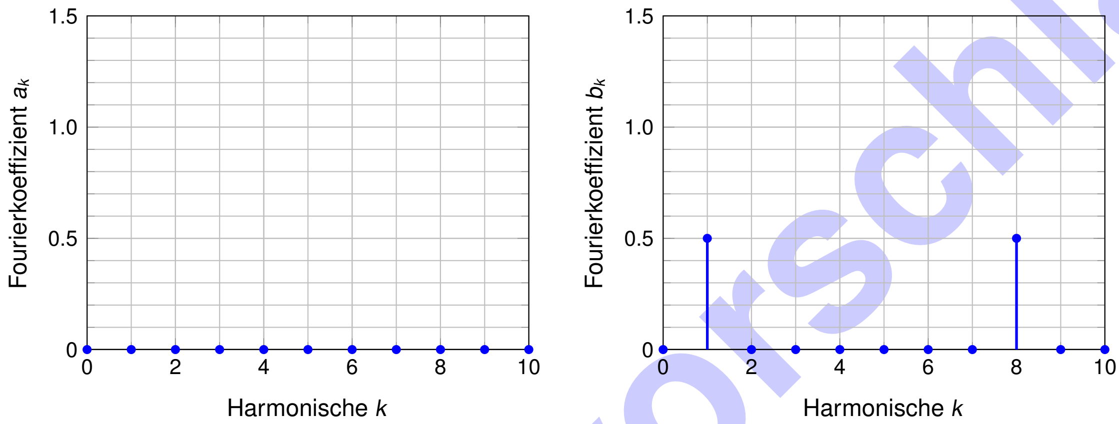
b) Gegeben sei das untenstehende, periodische Zeitsignal $s(t)$. Hierbei gilt $\omega = \frac{2\pi}{T}$, mit $T = 1$ s. Zeichnen Sie im Lösungsfeld das zu $s(t)$ gehörende Spektrum.





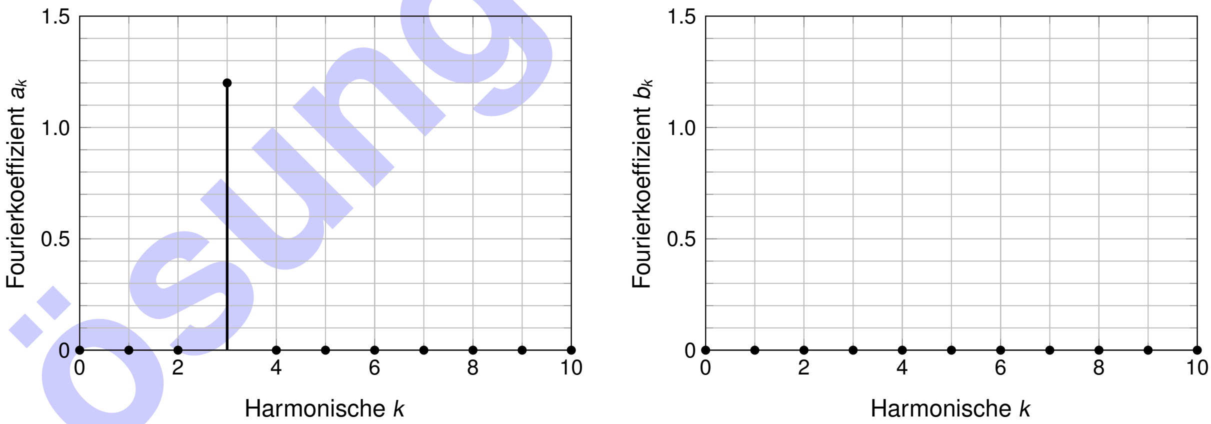
c) Gegeben sei das untenstehende, periodische Zeitsignal $s(t)$. Hierbei gilt $\omega = \frac{2\pi}{T}$, mit $T = 1\,\mathrm{s}$. Zeichnen Sie im Lösungsfeld das zu $s(t)$ gehörende Spektrum.

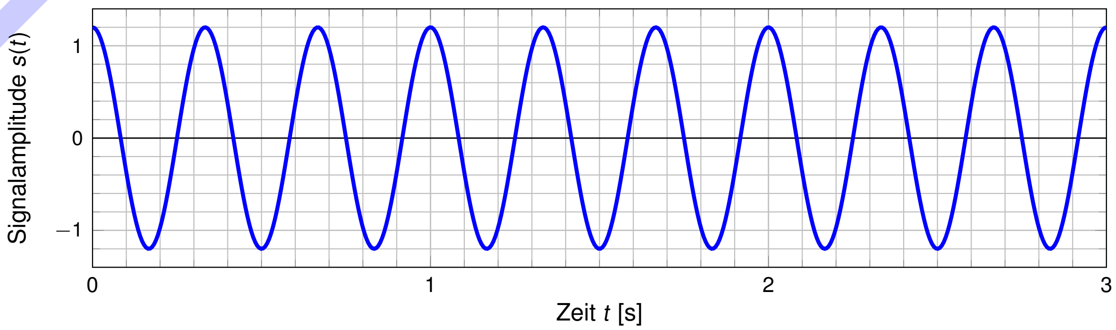




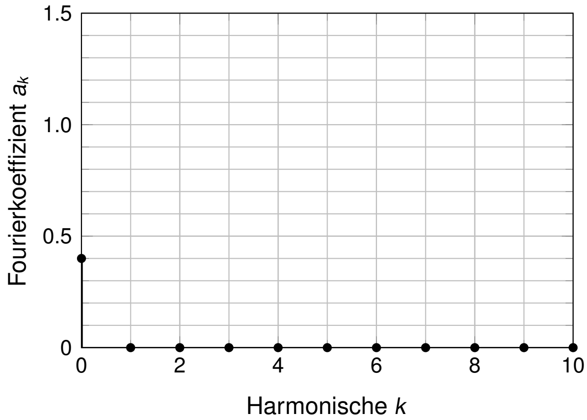
Synthese

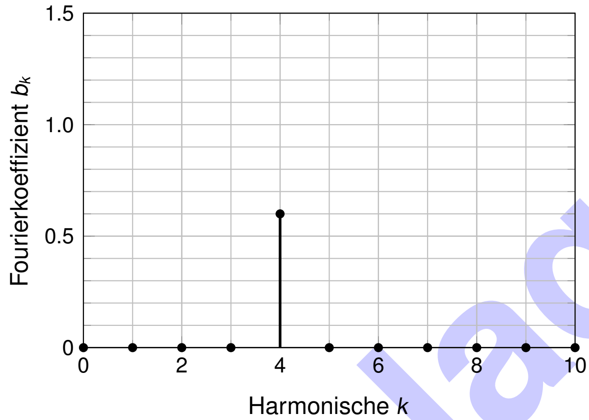
d) Gegeben sei das untenstehende Spektrum einer Fourierreihe. Zeichnen Sie im Lösungsfeld das dazu gehörende Zeitsignal $s(t)$ im Interval $[0, 2]$. Hierbei gilt $\omega = \frac{2\pi}{T}$, mit $T = 1\,\mathrm{s}$.

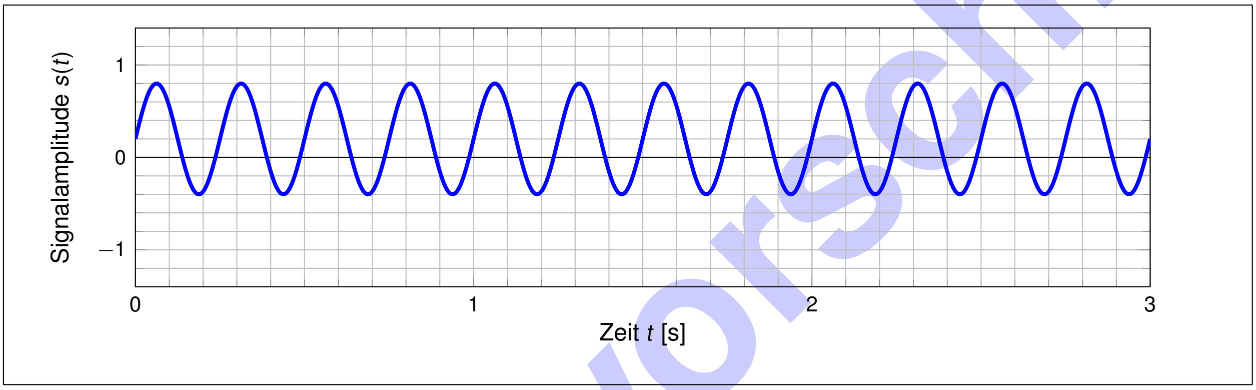




e) Gegeben sei das untenstehende Spektrum einer Fourierreihe. Zeichnen Sie im Lösungsfeld das dazu gehörende Zeitsignal $s(t)$ im Intervall $[0, 2]$. Hierbei gilt $\omega = \frac{2\pi}{T}$, mit $T = 1\,\mathrm{s}$.







Anmerkungen:
Aufgabe b) zeigt einen einzelnen Sinus. Daraus folgt direkt, dass alle $a_k = 0$. Die Frequenz des Sinus kann einfach abgelesen werden. Zwei vollständige Schwingungen passen in die Periodendauer $T = 1\,\mathrm{s}$. Daraus folgt $f = 2$.
In Aufgabe c) sind nun zwei Sinusfunktionen überlagert. Dies erkennt man, da das Signal weiterhin punktsymmetrisch ist, woraus weiterhin für alle $a_k = 0$ folgt. Man erkennt, dass sich das Signal nach jeweils 1 s wiederholt. Daraus folgt, dass eine der beiden Frequenzen $f_1 = 1$ sein muss. Innerhalb dieser Periodendauer gibt es acht vollständige Sinusschwingungen. Deshalb gilt $f_2 = 8$. Die Bestimmung der Amplituden der Einzelschwingungen, d.h. b_1 und b_8, gestaltet sich etwas schwieriger als zuvor und lässt sich teilweise nur noch abschätzen. Zur Bestimmung von b_1 versuchen wir nun, das „Zentrum“ der Basisschwingung zu bestimmen. Wenn man nun jeweils die Mitte der auf- und absteigenden Flanken bestimmt und diese zur die Grundschwingung verbindet, erkennt man eine Amplitude von 0.5. Daraus folgt $b_1 = 0.5$. Wenn wir danach als zweiten Schritt betrachten, um wieviel das überlagerte Signal sich von der Basisschwingung hin und herbewegt, erkennt man, dass $b_8 = 0.5$.
Im Spektrum in Aufgabe d) ist $a_3 = 1.2$. Daraus ergibt sich ein Kosinus der Frequenz 3 mit der Amplitude 1.2. Alle anderen a_k sind 0. Da auch alle $b_k = 0$ sind, gibt es keine weiteren (Sinus-)Schwingungen.
Das Spektrum von Aufgabe e) beinhaltet zwei Ausschläge größer 0. $a_0 = 2 \cdot 0.2$; daraus folgt, dass der Gleichanteil gleich $a_0/2$ ist. Zudem ist $b_4 = 0.6$, sodass wir einen nach oben verschobenen Sinus mit der Frequenz 4 und der Amplitude 0.6 als Zeitsignal bekommen.