Lehrstuhl für Netzarchitekturen und Netzdienste
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

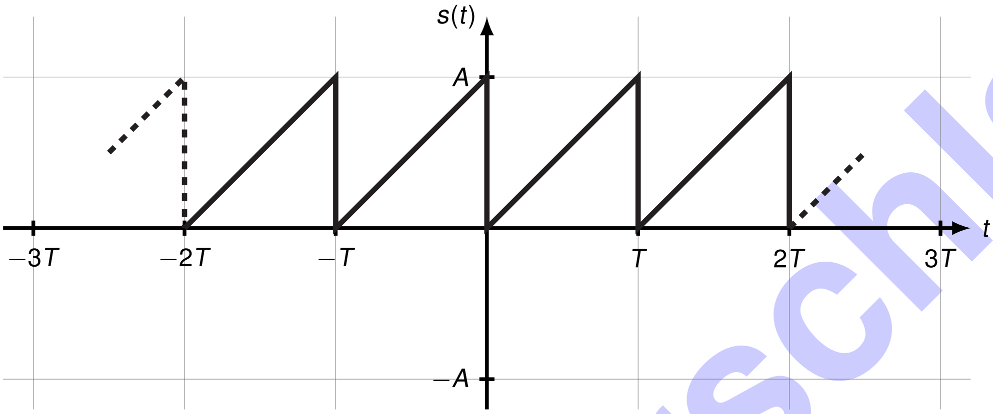
Grundlagen Rechnernetze und Verteilte Systeme (IN0010)

Übungsblatt 2

26. April – 30. April 2021

Aufgabe 1 Fourierreihe

Gegeben sei das folgende T-periodische Zeitsignal $s(t)$:



a)* Finden Sie einen analytischen Ausdruck für $s(t)$ im Intervall $[0, T]$.

$$s(t) = \frac{t}{T} \cdot A \quad \text{für} \quad t \in [0, T]$$

Hinweis: Siehe Geradengleichung $y = mx + t$ (Schulstoff).

Das Signal $s(t)$ lässt sich als Fourierreihe entwickeln, d. h.

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right). \tag{1.1}$$

Die Koeffizienten a_k und b_k lassen sich wie folgt bestimmen:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \cos(k\omega t)\, dt \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \sin(k\omega t)\, dt. \tag{1.2}$$

b)* Welcher Koeffizient in Formel (1.1) ist für den Gleichanteil von $s(t)$ verantwortlich?

Der Gleichanteil entsteht ausschließlich durch a_0, denn alle anderen Koeffizienten bestimmen die Amplitude einer Sinus- oder Kosinusschwingung.
Achtung: Gemäß Formel 1.1 ist der Gleichanteil $\frac{a_0}{2}$!

c) Bestimmen Sie rechnerisch den Gleichanteil des Signals $s(t)$.

Aus Formel (1.2) erhalten wir:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \cos(k\omega t)\, dt \overset{k=0}{=} \frac{2}{T} \int_0^T \frac{t}{T} \cdot A\, dt \\ &= \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{T} \int_0^T t\, dt = \frac{2A}{T^2} \cdot \frac{T^2}{2} = A \neq 0 \end{aligned}$$

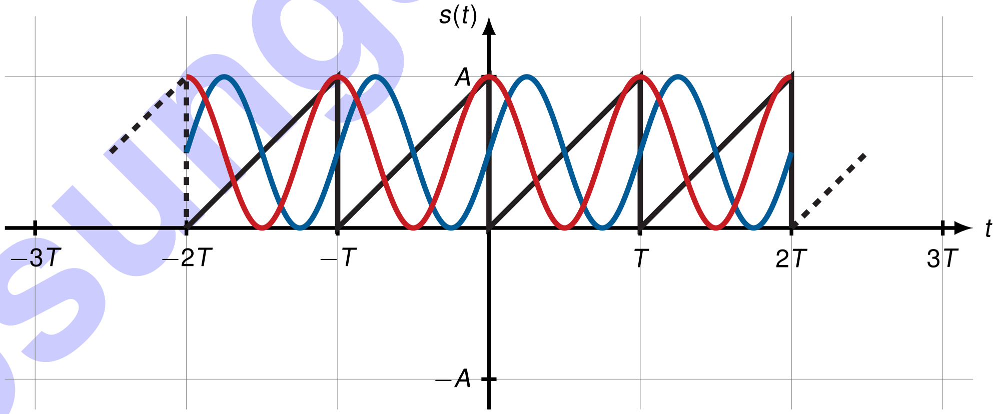
$\Rightarrow$ $s(t)$ besitzt einen Gleichanteil. Dieser beträgt $\frac{a_0}{2} = \frac{A}{2}$.

d)* Hätte man das Ergebnis aus der vorhergehenden Teilaufgabe auch *by inspection* erahnen können?

Ja: Das Signal $s(t)$ nimmt ausschließlich Werte größer Null an. Es kann daher nicht gleichanteilsfrei sein. Aus der Steigung der einzelnen Sägezähne lässt sich leicht erahnen, dass der zeitliche Mittelwert des Signals bei $A/2$ liegen muss.

e)* Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k.
Hinweis: Sie benötigen hier keine Rechnung. Vergleichen Sie stattdessen die Symmetrie von $s(t)$ mit einer Kosinus-Schwingung. Kann ein gewichteter Kosinus einen Beitrag zum Gesamtsignal liefern?

Intuitiv
Der Sägezahn $s(t)$ ist in Phase mit einer Sinus-Schwingung: Zu Vielfachen der Periodendauer T besitzt $s(t)$ Nulldurchgänge (den Gleichanteil einmal abgezogen). Dies entspricht genau dem Verhalten einer Sinusschwingung. Falls Sie das nicht sehen, stellen Sie sich den abrupten Pegelwechsel an Vielfachen von T leicht abgeschrägt vor.
Ein kosinus-förmiges Signal hingegen hätte an diesen Stellen stets den Wert ± 1. Da dies allerdings nicht der Form des Sägezahns entspricht, müssen die Kosinus-Anteile entfernt werden. Dies wird durch $a_k = 0, \forall k > 0$ erreicht.
Mathematisch
Da $\sin(x) = -\sin(-x)$ handelt es sich hierbei um eine ungerade (also punktsymmetrische) Funktion. Das Signal $s(t)$ ist, wenn man den Gleichanteil abzieht, ebenfalls punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung (andernfalls ist der Symmetriepunkt lediglich entlang der Ordinate verschoben). Der Kosinus hingegen ist eine gerade bzw. achsensymmetrische Funktion, weswegen er nicht zu $s(t)$ beisteuern kann.
Anschaulich
In der untenstehenden Abbildung sind $s(t)$, $\cos(2\pi t)$ und $\sin(2\pi t)$ eingezeichnet. Man sieht, dass der Sinus bei Vielfachen von π das Signal $s(t)$ genau in seinen Mittelwerten kreuzt, während der Kosinus Extremwerte ungleich $s(k\pi)$ für $k \in \mathbb{Z}$ annimmt.



Von nun an nehmen wir zur Vereinfachung $T = 1$ an.

f)* Bestimmen Sie die Koeffizienten b_k.

Hinweise: $\int_0^1 t\sin(ct)\,dt = \dfrac{\sin(c) - c\cdot\cos(c)}{c^2}$ und $\omega = 2\pi/T$.

Der Hinweis erspart uns eine partielle Integration. Wir erhalten:

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T s(t)\sin(k\omega t)\,dt = 2A\int_0^1 t\sin(k\omega t)\,dt \tag{1.3}$$

$$= 2A\cdot\frac{\sin(k\omega) - k\omega\cos(k\omega)}{k^2\omega^2} \overset{\omega=2\pi}{=} -\frac{A}{k\pi} \tag{1.4}$$

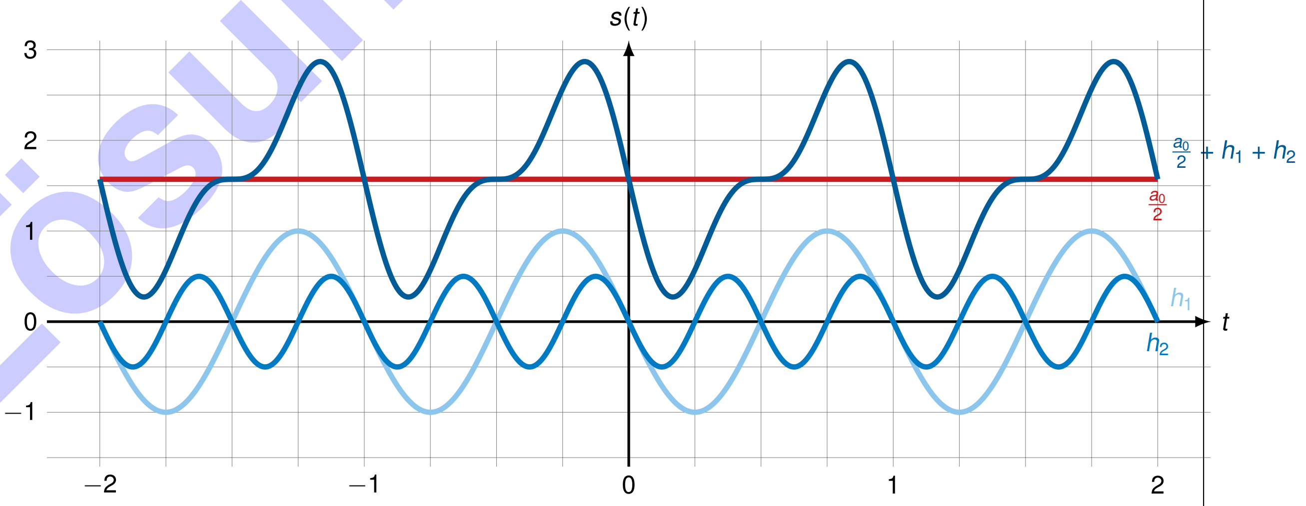
g) Skizzieren Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Gleichanteil $a_0/2$, die ersten beiden Harmonischen sowie deren Summe für $A = \pi$ in einem Koordinatensystem.

Für $A = \pi$ erhalten wir:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2} \approx 1.6,\ b_1 = -1,\ b_2 = -\frac{1}{2}.$$

Die ersten beiden Harmonischen lauten

$$h_1(t) = b_1\sin(2\pi t) = -\sin(2\pi t), \quad \text{und} \quad h_2(t) = b_2\sin(4\pi t) = -\frac{1}{2}\sin(4\pi t).$$



Aufgabe 2 **Quellenentropie**

Gegeben sei eine binäre, gedächtnislose Nachrichtenquelle Q, welche voneinander statistisch unabhängige Zeichen aus dem Alphabet $\mathcal{X} = \{a, b\}$ emittiert. Wir modellieren diese Nachrichtenquelle als diskrete Zufallsvariable X. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Quelle das Zeichen $X = a$ emittiert, betrage $p_a = \Pr[X = a] = 0.25$.

a)* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p_b, dass das Zeichen $X = b$ emittiert wird.

Da $p_a + p_b = 1$ folgt $p_b = 0.75$.

b) Bestimmen Sie den Informationsgehalt $I(a)$ und $I(b)$ beider Zeichen.

$$I(a) = -\log_2 p_a = 2.00\,\text{bit}$$
$$I(b) = -\log_2 p_b \approx 0.42\,\text{bit}$$

c) Bestimmen Sie die Entropie H der Quelle.

$$H(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p_x I(x) = 0.81\,\text{bit/Zeichen}$$

d) Bestimmen Sie die Auftrittswahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 einer anderen binären Nachrichtenquelle Q', so dass deren Entropie H maximal ist.

Zunächst drücken wir p_1 durch p_0 aus und schreiben $p_1 = 1 - p_0$. Zur Vereinfachung schreiben wir $p_0 = p$. Anschließend lässt sich die Entropie H als Funktion in Abhängigkeit von p ausdrücken und die gesuchte Wahrscheinlichkeit mittels Ableitung bestimmen:

$$\begin{aligned} H &= -p\log_2(p) - (1-p)\log_2(1-p) \\ \frac{dH}{dp} &= -\log_2(p) - \frac{p}{p\ln(2)} + \log_2(1-p) + \frac{1-p}{(1-p)\ln(2)} \\ &\Rightarrow \log_2(p) + \frac{p}{p\ln(2)} \overset{!}{=} \log_2(1-p) + \frac{1-p}{(1-p)\ln(2)} \end{aligned}$$

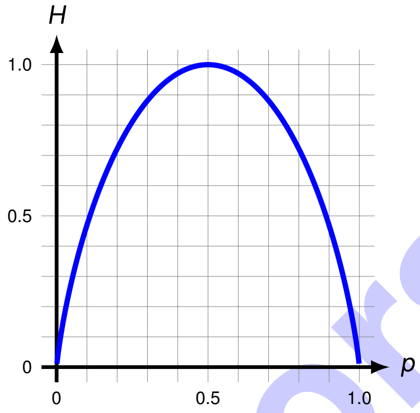
Vergleich beider Seiten liefert $p = 1 - p = 1/2$.

e) Wie hoch ist demnach die maximale Entropie einer binären Quelle?

Die Entropie wird maximiert, wenn $\Pr[X = a] = \Pr[X = b] = 0.5$ gilt. Die maximale Entropie beträgt daher

$$H_{\max} = -2 \cdot 0.5 \cdot \log_2(0.5) = 1\,\text{bit}/\text{Zeichen}.$$

f) Skizzieren Sie die Quellenentropie H einer binären Quelle allgemein in Abhängigkeit der Auftrittswahrscheinlichkeit p.



g) Offensichtlich ist die Entropie $H(X) < 1$ nicht maximal. Welche Schlussfolgerung lässt sich aus dieser Tatsache für den von der Quelle Q emittierten Datenstrom hinsichtlich Redundanz ableiten?

Die von Q emittierte Zeichenkette, welche nichts anderes ist als verschiedene Realisierungen der Zufallsvariable X, beinhaltet Redundanz. Der von Q erzeugte Datenstrom ist durchschnittlich mit weniger als 1 bit/ Symbol darstellbar.

h) Verallgemeinern Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben d) und e) auf eine N-äre Quelle, d. h. auf eine Quelle, die N unterschiedliche Zeichen emittiert.

Allgemein gilt für die Entropie

$$H(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} I(x) p_i.$$

Mit der Forderung $p_i = p$, d. h. alle Zeichen treten mit derselben Wahrscheinlichkeit auf, folgt sofort $p = 1/N$ und damit

$$H = \sum_{x \in \mathcal{X}} I(x) p = -\sum_{i=1}^{N} \log_2\left(\frac{1}{N}\right) \frac{1}{N} = \log_2(N).$$